ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \varrho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2=\varrho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 τότε να αποδείξετε ότι

$$z_1z_2=\varrho_1\varrho_2\,[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)].$$

Β. Έστω $\Omega=\{1,2,\ldots,10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda\in\Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R\to R$, με

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\lambda^2, \quad x\in R.$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Χ,Υ όπου :

Χ : Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,5]$, είναι μεγαλύτερη ή ίση του 68/3.

Υ : Η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,5]$, είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Χ,Υ, $X\cap Y$ και $X\cup Y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Έστω ότι Α,Β είναι νxν πίνακες, με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοιοι, ώστε $4A^2-B^2=I$ και $AB=BA$, όπου Ι είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες $2A+B$ και $2A-B$ είναι αντιστρέψιμοι.

β) Έστω Χ,Υ είναι νxν πίνακες τέτοιοι, ώστε

$$2AX+BY=2A+I \text{ και } BX+2AY=B.$$

i) Να αποδείξετε ότι $X=2A+I$ και $Y=-B$.

ii) Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα Y^2+2X είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Β. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου Μ(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi \in [0,2\pi)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi \in (0,2\pi)$.

β) Έστω Ε(φ), με $\varphi \in (0,\pi/2)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο Μ(4συνφ, 5ημφ) με τους άξονες x΄x και y΄y.

Να αποδείξετε ότι $E(\varphi) \geq 20$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω $f : R \to R$ συνάρτηση συνεχής στο R.

Έστω $I : R \to R$ η συνάρτηση με

$$I(x)=\int_0^1 \left[(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4 \right] dt, \text{ για } x \in R.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o = 5\int_0^1 t^2 f(t)\, dt$

Β. Έστω η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to R$, με

$$f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα Α και Β, είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω f,g : $R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x)-g(x)=x-4, \text{ για } x \in R.$$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση y=2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$.